

Signaux aléatoires

Brefs rappels de probabilité

Simon Leglaive

CentraleSupélec

Variable aléatoire

- Une **variable aléatoire** X est une fonction qui associe à toute **épreuve** ω dans l'**univers** Ω une valeur dans un ensemble E :

$$X : \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in E.$$

Par exemple :

- Pile ou face : $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$, $E = \{0, 1\}$.
 - Taille d'un élève de CentraleSupélec : $\Omega = ?$, $E = \mathbb{R}$ (il n'est souvent pas nécessaire d'explicitier Ω , en particulier pour une v.a. réelle).
- Autrement dit, une variable aléatoire est une fonction qui attribue un nombre à chaque résultat possible d'une expérience aléatoire.

Espace de probabilité

Plus formellement, l'**univers** ou ensemble des épreuves Ω (c'est l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire) doit appartenir à un **espace de probabilité** (ou espace probabilisé) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où :

- $\mathcal{F}$ est une **tribu** ou σ -algèbre sur Ω . C'est une **collection de sous-ensembles « bien construits » de Ω** qu'on appelle **événements**.

Par construction, une tribu satisfait certaines propriétés (non vide, contient Ω , stable par complémentaire, stable par union dénombrable, stable par intersection dénombrable).

- Pour le jeu pile ou face : $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \text{pile}, \text{face}\}$.
- Pour le prix du kilo de tomates, non seulement l'événement $\{\omega : X(\omega) = c\}$ doit appartenir à $\mathcal{F}$, mais aussi

$$\{\omega : a \leq X(\omega) \leq b\}, \quad \{\omega : a \leq X(\omega)\} \quad \{\omega : X(\omega) \leq b\}$$

et beaucoup d'autres événements qui peuvent être intéressants selon telle ou telle situation.

On souhaite que les opérations élémentaires $\cup, \cap, ^c$ sur les événements de $\mathcal{F}$ ne conduisent pas en dehors de cet ensemble, car nous aurons besoin d'évaluer la probabilité associée à ces opérations.

- $\mathbb{P}$ est une **mesure de probabilité sur la tribu $\mathcal{F}$** : à chaque **événement $A \in \mathcal{F}$** elle associe un nombre $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$.

Une mesure de probabilité satisfait les propriétés suivantes :

- Pour les événements $A, B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et, si A et B sont disjoints, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

- En résumé :

On définit l'**univers** Ω comme l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire, puis on définit la **tribu** $\mathcal{F}$ sur Ω comme une collection de sous-ensembles « bien construits », et finalement on définit la **mesure de probabilité** $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathcal{F}$ qui permet d'associer un nombre $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ à tout **événement** $A \in \mathcal{F}$.

On obtient l'**espace probabilisé** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

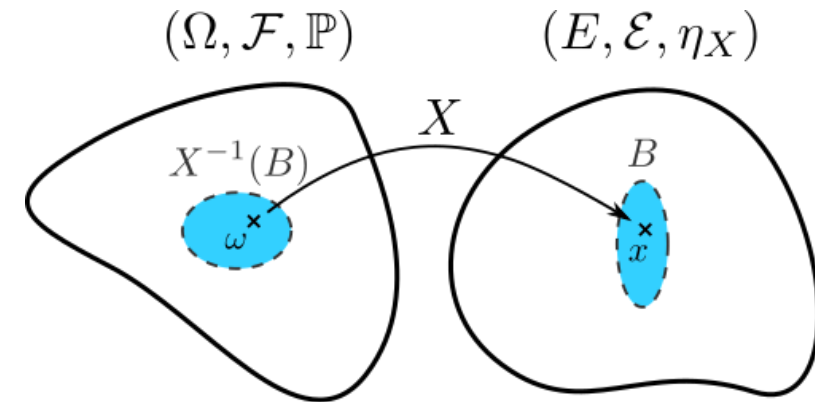
- On a vu tout ce qui concerne l'ensemble de définition de la variable aléatoire, concentrons nous maintenant sur l'ensemble d'arrivée.

- L'ensemble E doit être muni d'une tribu $\mathcal{E}$ sur E afin de former un **espace mesurable** $(E, \mathcal{E})$.

Par exemple, pour une variable aléatoire réelle, $E = \mathbb{R}$ et on peut définir $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne : la plus petite tribu sur $\mathbb{R}$ contenant tous les ensembles ouverts.

- La variable aléatoire X est alors en réalité une **fonction mesurable** sur $(E, \mathcal{E})$, c'est-à-dire que pour tout sous-ensemble B de la tribu $\mathcal{E}$, l'image réciproque $X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}$ et donc on peut calculer la probabilité $\mathbb{P}(X^{-1}(B))$ grâce à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

- Cette définition permet de transposer l'aléa qui provient de Ω dans l'espace E .
- On souhaite maintenant également transposer la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur E .



Source: Wikipedia, $\eta_X = \mathbb{P}_X$

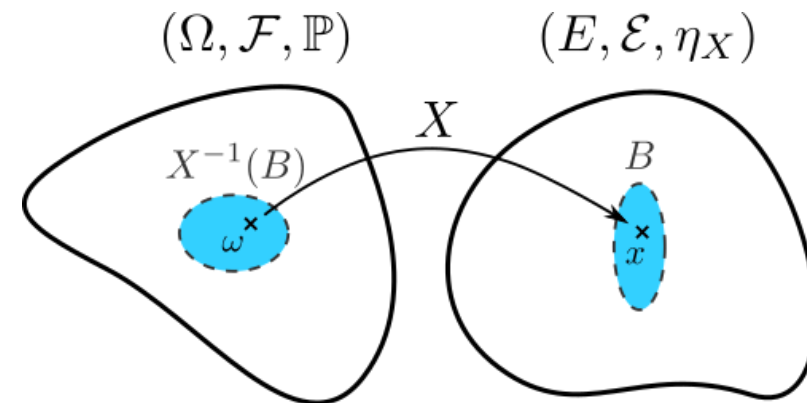
Loi de probabilité

- On définit ainsi la probabilité que X prenne ses valeurs dans un sous-ensemble B de $\mathcal{E}$ par :

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in B\}),$$

que l'on notera souvent plus simplement $\mathbb{P}(X \in B)$.

- $\mathbb{P}_X$, appelée probabilité image de $\mathbb{P}$ par X , définit une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$.



Source: Wikipedia, $\eta_X = \mathbb{P}_X$

L'ensemble des probabilités $\mathbb{P}_X(B)$ pour tous les sous-ensembles B de la tribu $\mathcal{E}$ définit la **distribution** ou **loi de probabilité** de X .

Théorème de transfert et espérance

- Pour toute fonction φ mesurable et intégrable au sens de Lebesgue définie sur $(E, \mathcal{E})$:

$$\mathbb{E} [\varphi(X)] = \int_{\Omega} \varphi(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_E \varphi(x) d\mathbb{P}_X(x).$$

- Ce résultat permet de calculer l'espérance mathématique de X sans connaître l'espace de probabilité sous-jacent, en intégrant directement par rapport à $\mathbb{P}_X$, la loi de X définie sur $(E, \mathcal{E})$.

Une fonction $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite mesurable si, pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, l'image réciproque de l'intervalle $] -\infty, a]$ par φ , c'est-à-dire $\{x \in E : \varphi(x) \leq a\}$ appartient à la tribu $\mathcal{E}$.

Une fonction φ est intégrable au sens de Lebesgue si : $\int_E |\varphi(x)| d\mathbb{P}_X(x) < \infty$.

Fonction de répartition

- La loi de probabilité d'une v.a. est également entièrement caractérisée par sa **fonction de répartition**

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) = \mathbb{P}_X([-\infty, x]).$$

Si deux variables aléatoires ont même fonction de répartition, alors elles ont même loi, et réciproquement.

- La fonction de répartition permet de calculer la probabilité que X appartienne à un intervalle $]a, b]$, $a < b$:

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a).$$

- On peut aussi calculer la probabilité que X soit égale à un certain nombre x :

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(X \leq x - h) = F_X(x) - \lim_{h \rightarrow 0} F_X(x - h)$$

Variable continue et densité de probabilité

- Pour une variable aléatoire continue, très souvent la fonction de répartition est différentiable par rapport à x , ce qui revient à dire qu'il existe une **densité de probabilité** $p_X(x)$ telle que :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(y) dy,$$

où $p_X(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1$.

- On a $d\mathbb{P}_X(x) = p_X(x)dx$ et donc

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_E x d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x p_X(x) dx.$$

Variable discrète et masse de probabilité

- Pour une variable aléatoire discrète, on définira souvent sa distribution via une **fonction de masse de probabilité**.
- Si $E = \{x_1, x_2, \dots\}$ représente l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire X , alors la fonction de masse de probabilité notée $p_X(x)$ est définie par

$$p_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- La loi de la variable est une somme pondérée de mesures de Dirac : $\mathbb{P}_X = \sum_i \mathbb{P}(X = x_i) \delta_{x_i}$.
- On a alors

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_E x d\mathbb{P}_X(x) = \int_E x \sum_i \mathbb{P}(X = x_i) d\delta_{x_i} = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

La fonction de répartition est :

- continue pour une variable aléatoire continue :

$$\lim_{h \rightarrow 0} F_X(x - h) = F_X(x)$$

et donc $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Exemple: Loi normale / gaussienne.

- en escalier pour une variable aléatoire discrète

Exemple: Loi de Poisson.

Ressources

Pour plus d'informations sur les concepts de base de la théorie des probabilités, voir

- la section 1.1 du livre [Elementary Stochastic Calculus, with Finance in View](#) de Thomas Mikosch, accessible en ligne avec votre compte CentraleSupélec.
- La section [Notations et rappels](#) du cours HAX603X: Modélisation stochastique enseigné par Joseph Salmon à l'Université de Montpellier.
- L'annexe du polycopié [Introduction aux séries temporelles](#) écrit par Olivier Cappé, Maurice Charbit, et Eric Moulines.