

Signaux aléatoires

Définition et loi de probabilité

Simon Leglaive

CentraleSupélec

Au programme aujourd'hui

- Définition d'un signal / processus aléatoire
- Loi de probabilité

Définition d'un signal / processus aléatoire

Définition

Un **processus aléatoire**, noté $\{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ ou $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$, est un ensemble de variables aléatoires indexées par $t \in \mathbb{T}$, définies sur et à valeur dans le même espace.

- Pour les processus à **temps continu**, $\mathbb{T}$ est souvent un interval, par exemple $\mathbb{T} = [a, b]$, $[a, b[$ ou $[a, +\infty[$ pour $a < b$.
- Pour les processus à **temps discret**, $\mathbb{T}$ est un ensemble fini, par exemple $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, T - 1\}$ pour un certain entier T , ou un ensemble infini dénombrable, par exemple $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.
- L'indice t de la variable aléatoire t est souvent appelé le **temps**.

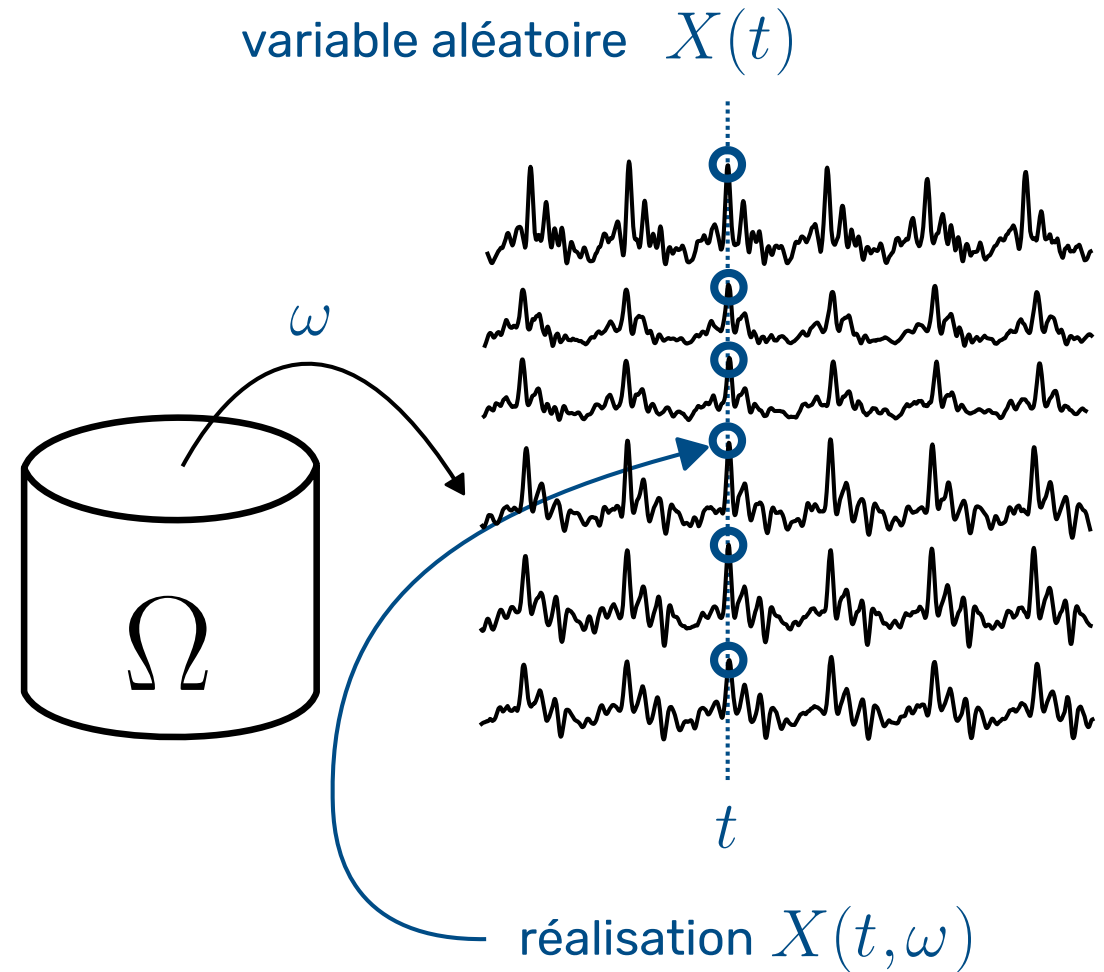
Un **processus aléatoire** est une **fonction de deux variables** :

- Pour un **instant de temps** $t \in \mathbb{T}$ **fixé**, il s'agit d'une **variable aléatoire**.
- C'est une fonction définie sur l'ensemble des épreuves Ω :

$$X(t) : \omega \in \Omega \mapsto X(t, \omega).$$

- $X(t, \omega)$ est une réalisation de la variable aléatoire $X(t)$ pour l'épreuve aléatoire $\omega \in \Omega$. Elle peut prendre des valeurs discrètes ou continues, selon le type de processus.

Ω est l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire.

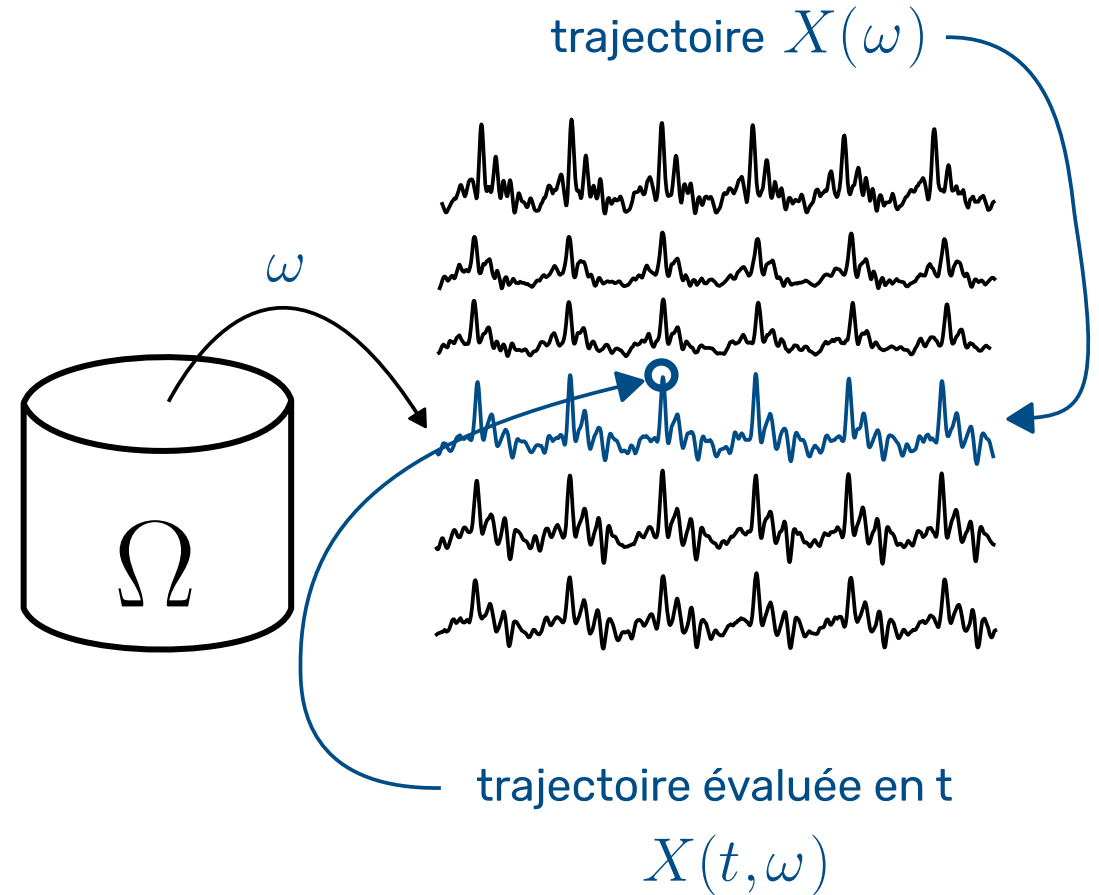


Un **processus aléatoire** est une **fonction de deux variables** :

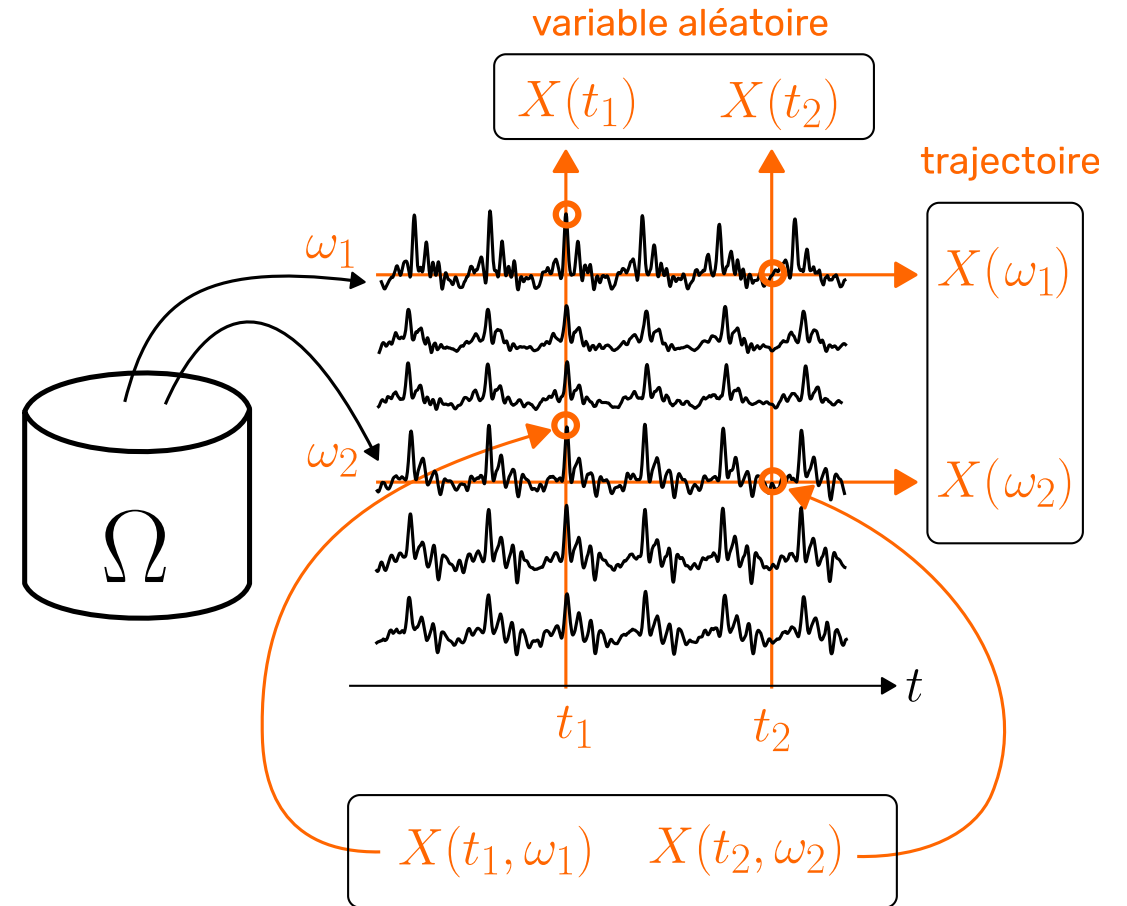
- Pour une **épreuve aléatoire donnée** $\omega \in \Omega$, il s'agit d'une **fonction du temps** :

$$X(\omega) : t \in \mathbb{T} \mapsto X(t, \omega).$$

- Cette fonction est appelée une **réalisation** ou une **trajectoire** du processus aléatoire $X(t)$.
- C'est finalement un **signal déterministe**.



- On observe sur cette figure 6 trajectoires du processus aléatoire $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$.
- Chaque trajectoire est une réalisation différente du processus, associée à une épreuve aléatoire $\omega \in \Omega$ différente.
- Une variable aléatoire $X(t)$, $t \in \mathbb{T}$, s'obtient en fixant le temps t .
- En général, deux variables aléatoires $X(t_1)$ et $X(t_2)$ avec $t_1 \neq t_2$ n'ont pas la même distribution de probabilité.



Processus aléatoire discret, réel, complexe

- Processus aléatoire à valeur discrète : $X(t)$ prend ses valeurs dans un ensemble fini ou infini dénombrable.
- Processus aléatoire à valeur réelle : $X(t) \in \mathbb{R}$
- Processus aléatoire à valeur complexe : $X(t) = U(t) + jV(t)$ avec $U(t), V(t) \in \mathbb{R}$.

On peut aussi construire des processus aléatoires à plusieurs dimensions, par exemple $X(t) \in \mathbb{R}^d$.

Loi d'un processus aléatoire

Objectif : On cherche à définir la **distribution (ou loi) de probabilité d'un processus aléatoire**.

- Par définition, un processus aléatoire est un ensemble de variables aléatoires indexées par le temps $t \in \mathbb{T}$.
- Il semble donc assez naturel de s'intéresser à **loi de probabilité jointe** de l'ensemble des variables aléatoires $\{X(t), t \in \mathbb{T}\}$.
- Problème : Lorsque l'ensemble $\mathbb{T}$ est infini dénombrable (e.g., $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$), nous avons à définir la loi jointe d'un **ensemble infini de variables aléatoires**, ce qu'on ne sait pas faire.
- Idée : Restreignons nous à un **ensemble fini mais arbitraire** de variables aléatoires issues du processus.

C'est exactement l'idée derrière la définition des **loi fini-dimensionnelles** du processus.

Loi fini-dimensionnelle : définition

On appelle **lois fini-dimensionnelles** d'ordre $k \in \mathbb{N}$ du processus $\{X(t), t \in \mathbb{T}\}$, l'**ensemble des lois de probabilité jointe** des variables $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)\}$ où $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ est un k -uplet arbitraire d'**instants d'observation distincts**.

- La spécification des lois k -dimensionnelles permet d'évaluer des quantités faisant intervenir la loi jointe du processus à k instants successifs.
- Par exemple, la spécification des lois fini-dimensionnelles d'ordre 2 permet d'évaluer des expressions de la forme $\mathbb{P}(X(t_1) \leq a, X(t_2) \leq b)$ ou encore $\mathbb{E}[f(X(t_1))g(X(t_2))]$, où f et g sont des fonctions arbitraires telles que l'espérance existe.

- Connaître la loi jointe des variables $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)\}$ est équivalent à connaître la **fonction de répartition**

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k; t_1, t_2, \dots, t_k) = \mathbb{P}\left(\{X(t_1) \leq x_1\}, \{X(t_2) \leq x_2\}, \dots, \{X(t_k) \leq x_k\}\right).$$

- Dans de nombreuses situations, **les fonctions de répartition sont différentiables** par rapport aux variables $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, ce qui revient à dire qu'il existe des fonctions positives $p(x_1, x_2, \dots, x_k; t_1, t_2, \dots, t_k)$ appelées **densités de probabilité jointes** telles que :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k; t_1, t_2, \dots, t_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_k} p(y_1, y_2, \dots, y_k; t_1, t_2, \dots, t_k) dy_1 dy_2 \dots dy_k.$$

Pour des processus aléatoires complexes les fonctions de répartition et densités de probabilité jointes seront celles des parties réelles et imaginaires du processus, mais bon, les notations sont déjà suffisamment lourdes...

Loi temporelle : définition

On appelle **loi temporelle** du processus l'**ensemble des distributions fini-dimensionnelles à tout ordre**.

La question que tout le monde se pose maintenant est :

La loi temporelle caractérise-t-elle complètement la distribution du processus ?

... et la réponse est **OUI**¹.

C'est le **théorème d'extension de Kolmogorov** qui garantit l'existence et l'unicité (au sens de sa loi de probabilité) d'un processus stochastique dont on impose les lois fini-dimensionnelles, à condition que celles-ci soient consistantes.

1. Sous une condition de consistance des lois fini-dimensionnelles, qui en réalité est toujours vérifiée.

Cette condition de consistance peut se formuler de la façon suivante : Si on considère la loi jointe d'un ensemble de variables pour k instants, alors la loi jointe pour un sous-ensemble de $l < k$ instants, obtenue en marginalisant (intégrant ou sommant) sur les autres variables, et pour toute permutation de ces instants, doit coïncider avec la loi fini-dimensionnelle définie directement pour ces l instants, dans le même ordre.

En résumé

Pour définir un processus aléatoire, il suffit de définir sa loi temporelle, c'est-à-dire l'ensemble des lois fini-dimensionnelles (qui doivent être consistantes) à tout ordre.

Exemple du bruit blanc gaussien

Pour tout entier k et tout k -uplet $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$, $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)\}$ est défini comme un **vecteur gaussien** de vecteur moyenne nul et de matrice de covariance proportionnelle à l'identité:

$$\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_k) \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_k),$$

avec $\sigma^2 > 0$.

On écrira :

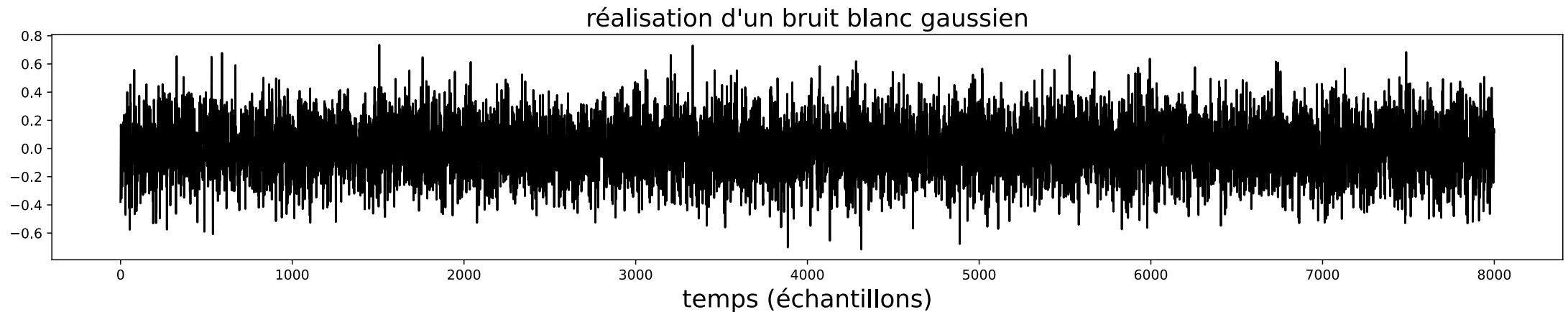
$$X(t) \stackrel{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

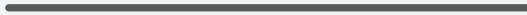
où *i. i. d* signifie **indépendant et identiquement distribué**.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import soundfile as sf
4
5 sr = 8000
6 T = 1*sr
7 std = 0.2
8 x = std*np.random.randn(T)
9
10 plt.figure(figsize=(20,3))
11 plt.plot(x, 'k')
12 plt.xlabel('temps (échantillons)', fontsize=18)
13 plt.title('réalisation d\'un bruit blanc gaussien', fontsize=18)
14 plt.savefig('images/WGN.svg', bbox_inches='tight')
15
16 sf.write('audio/WGN.wav', x, sr)

```



▶ 0:00 / 0:01   

🤔 Mais pourquoi on appelle ça un bruit **blanc** ?

↪ Réponse quand on caractérisera les processus aléatoires dans le domaine spectral.

Indépendance de deux processus

- On s'intéresse souvent aux interactions entre plusieurs signaux aléatoires (e.g., signal utile et bruit).
- On dit que les deux processus $\{X(t)\}_t$ et $\{Y(t)\}_t$ définis sur un même espace de probabilité sont indépendants si et seulement si pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et tout m -uplet $(t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{Z}^m$ et tout n -uplet $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$, loi jointe de $\{X(t)\}_{t=t_1}^{t_m}$ et $\{Y(t)\}_{u=u_1}^{u_n}$ est égale au produit des lois de $\{X(t)\}_{t=t_1}^{t_m}$ et $\{Y(t)\}_{u=u_1}^{u_n}$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\{X(t_1) \leq x_1\}, \{X(t_2) \leq x_2\}, \dots, \{X(t_m) \leq x_m\}, \right. \\ & \quad \left. \{Y(u_1) \leq y_1\}, \{Y(u_2) \leq y_2\}, \dots, \{Y(u_n) \leq y_n\}\right) = \\ & \mathbb{P}\left(\{X(t_1) \leq x_1\}, \{X(t_2) \leq x_2\}, \dots, \{X(t_m) \leq x_m\}\right) \\ & \quad \times \mathbb{P}\left(\{Y(u_1) \leq y_1\}, \{Y(u_2) \leq y_2\}, \dots, \{Y(u_n) \leq y_n\}\right). \end{aligned}$$