

Signaux aléatoires

Propriétés spectrales des signaux aléatoires

Simon Leglaive

CentraleSupélec

Dans les épisodes précédents...

- Un processus aléatoire est une collection de variables aléatoires indexées par le temps. C'est une fonction de deux variables : l'aléa et le temps.
- Un processus aléatoire est complètement décrit par sa loi temporelle, et partiellement décrit par ses propriétés au second ordre.
- Un processus peut être stationnaire (au sens strict ou au sens large), ce qui simplifie grandement sa description statistique et son traitement.
- La propriété d'ergodicité ajoutée à celle de stationnarité permet de remplacer les moyennes statistiques par des moyennes temporelles.

Au programme

- Dans le cas déterministe, la transformée de Fourier nous permet de représenter un signal dans le domaine fréquentiel afin d'étudier ses propriétés spectrales.
- Comment faire de même pour un signal aléatoire ?

Rappels : Transformée de Fourier à temps discret (TFTD)

Soit $x(t) \in \mathbb{R}$ un signal déterministe défini sur $t \in \mathbb{Z}$ de module sommable, c'est-à-dire tel que

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}} |x(t)| < \infty.$$

- La **TFTD** de $x(t)$ est définie par

$$\hat{x}(\nu) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} x(t) e^{-i2\pi\nu t},$$

où ν est appelée la **fréquence réduite** (ou normalisée) et $i = \sqrt{-1}$.

- Par définition, la TFTD est périodique de période 1 :

$$\hat{x}(\nu + 1) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} x(t) e^{-i2\pi(\nu+1)t} = \sum_{t \in \mathbb{Z}} x(t) e^{-i2\pi\nu t} e^{-i2\pi t} = \sum_{t \in \mathbb{Z}} x(t) e^{-i2\pi\nu t} = \hat{x}(\nu).$$

On limite donc sa représentation à l'intervalle $\nu \in [-0.5, 0.5[$ ou $\nu \in [0, 1[$.

- La **TFTD inverse** est définie par :

$$x(t) = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{x}(\nu) e^{+i2\pi\nu t} d\nu.$$

Rappels : Propriétés de la TFTD

Propriété	Domaine temporel	Domaine spectral
Linéarité	$ax(t) + by(t)$	$a\hat{x}(\nu) + b\hat{y}(\nu)$
Décalage temporel	$x(t - t_0)$	$\hat{x}(\nu)e^{-i2\pi\nu t_0}$
Décalage fréquentiel	$x(t)e^{i2\pi\nu_0 t}$	$\hat{x}(\nu - \nu_0)$
Convolution	$[x \star y](t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)y(t - k)$	$\hat{x}(\nu)\hat{y}(\nu)$
Symétrie hermitienne	$x(t) \in \mathbb{R}$	$\hat{x}(\nu) = \hat{x}^*(1 - \nu)$

La TFTD d'un signal aléatoire ?

- La TFTD d'un signal aléatoire n'est en général pas définie.
- Exemple :
 - Soit $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ un signal aléatoire stationnaire défini par $X(t) = C + B(t)$ où C est une constante et $B(t)$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2 .
 - Il est évident que ce signal n'est pas de module sommable, la constante C seule suffit à faire diverger la somme.
- On va donc plutôt chercher à travailler avec des **quantités moyennes** (i.e., en espérance) pour étudier les propriétés spectrales d'un processus aléatoire.

Théorème de Wiener-Khinchin et densité spectrale de puissance

- Soit $\{X(t)\}_t$ un processus aléatoire **stationnaire au sens large** (SSL) de moyenne m_X et fonction d'autocovariance $R_{XX}(k)$ absolument sommable.
- Le **théorème de Wiener-Khinchin** énonce que la **densité spectrale de puissance (DSP)** du processus est égale à la TFTD de sa fonction d'autocovariance :

$$S_{XX}(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_{XX}(k) e^{-i2\pi\nu k}, \quad \nu \in [-0.5, 0.5].$$

- La fonction d'autocovariance est donc donnée par le TFTD inverse de la DSP :

$$R_{XX}(k) = \int_{-1/2}^{1/2} S_{XX}(\nu) e^{+i2\pi\nu k} d\nu.$$

- On peut montrer que $S_{XX}(\nu) \geq 0$ pour tout ν (voir exercice de TD).

Existence de la DSP ?

- La DSP telle qu'introduite dans le slide précédent n'est définie que si la fonction d'autocovariance est absolument sommable, mais si ce n'est pas le cas ?
- Il existe une notion plus générale pour caractériser la distribution de la puissance d'un signal aléatoire en fréquence, appelée **mesure spectrale de puissance**
- C'est assez technique, car cela fait appel à la théorie de la mesure que nous n'avons pas étudiée (voir par exemple le [polycopié de J.-C. Breton sur l'intégrale de Lebesgue](#)).
- Nous allons donc essayer de voir tout cela assez simplement.
- Pour un traitement plus rigoureux, voir par exemple
 - la section VI.2 du polycopié [Traitement numérique du signal. Première partie : Bases mathématiques](#) de Jérôme Idier et al.
 - la section 3.3 du polycopié [Analyse des Séries Temporelles et Applications](#) de Céline Lévy-Leduc et al.

Théorème d'Herglotz

- Le point de départ concerne les « bonnes propriétés » de la fonction d'autocovariance d'un processus SSL.
- Comme vu dans les cours précédents, celle-ci est à **symétrie hermitienne et semi-définie positive**.
- Le théorème d'Herglotz (qu'on admet) nous dit alors qu'**il existe une unique représentation spectrale de la fonction d'autocovariance**.

Mesure spectrale de puissance

- Cette **représentation spectrale** prend la forme d'une mesure positive $\mu \geq 0$ définie sur $\nu \in [-0.5, 0.5[$, **appelée mesure spectrale de puissance** et telle que :

$$R_{XX}(k) = \int_{-0.5}^{0.5} e^{+i2\pi\nu k} d\mu(\nu).$$

Cette mesure **existe toujours**, elle peut être **continue ou discrète**, et elle **encode la distribution de la puissance du processus en fonction de la fréquence**.

Dans l'expression précédente, nous avons affaire à une intégrale de Lebesgue par rapport à la mesure μ . Contrairement à l'intégrale de Riemann, l'intégrale de Lebesgue permet d'intégrer par rapport à une mesure quelconque, pas nécessairement absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, i.e., on ne peut pas forcément écrire $d\mu(\nu) = \phi(\nu)d\nu$ pour une certaine fonction mesurable ϕ .

- La mesure spectrale μ permet de **quantifier la puissance contenue dans une bande de fréquences** $[\nu_1, \nu_2]$ donnée :

$$\mu([\nu_1, \nu_2]) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\mu(\nu).$$

- Cette expression représente l'intégrale de la fonction constante **1** par rapport à la mesure μ sur l'intervalle considéré.

Mesure spectrale discrète

- Certains signaux aléatoires contiennent des **composantes périodiques ou constantes**.
- Leur puissance n'est pas répartie sur tout le spectre, mais **concentrée** à certaines fréquences : la mesure spectrale est discrète.
- On parle alors de **raies spectrales** : des **pics de puissance** dans le domaine fréquentiel.
- On va utiliser la **mesure de Dirac** pour représenter une concentration infiniment fine de puissance à une certaine fréquence.

Mesure de Dirac

- Soit δ_{x_0} la mesure de Dirac définie sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ (par exemple $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne) et centrée en $x_0 \in E$. Pour tout ensemble mesurable $A \in \mathcal{A}$, on a :

$$\delta_{x_0}(A) = \int_A d\delta_{x_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in A \\ 0 & \text{si } x_0 \notin A \end{cases}$$

Autrement dit, **l'intégrale de la fonction constante 1 sur A par rapport à la mesure δ_{x_0} donne simplement l'indication de la présence ou non du point x_0 dans A .**

Donc en particulier, si $A = \mathbb{R}$, on a $\int_{\mathbb{R}} d\delta_{x_0} = 1$.

- Et pour toute fonction mesurable $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, on a : $\int_E f(y) d\delta_{x_0}(y) = f(x_0)$.

La mesure de Dirac permet de « sélectionner » la valeur d'une fonction au point où la mesure est centrée.

La mesure de Dirac pour modéliser une raie spectrale

- On utilise la mesure de Dirac $\delta_{\nu_0}(\nu)$ pour représenter une concentration infiniment fine de puissance à la fréquence ν_0 .
- Par exemple, pour $X(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t + \phi)$ avec $\nu_0 \in [0, 0.5[$ et $\phi \sim U([0, 2\pi])$, la mesure spectrale est donnée par (voir exercice TD) :

$$\mu(\nu) = \frac{A^2}{4} [\delta_{\nu_0}(\nu) + \delta_{-\nu_0}(\nu)].$$

On en déduit la puissance totale du signal dans la bande de fréquence $[-0.5, 0.5[$:

$$\mu([-0.5, 0.5[) = \int_{-0.5}^{0.5} d\mu(\nu) = \frac{A^2}{4} \int_{-0.5}^{0.5} d\delta_{\nu_0}(\nu) + \frac{A^2}{4} \int_{-0.5}^{0.5} d\delta_{-\nu_0}(\nu) = \frac{A^2}{2}.$$

On utilise parfois les notations $d\delta_{\nu_0}(\nu) = \delta_{\nu_0}(d\nu)$ ou $d\delta_{\nu_0}(\nu) = \delta_{\nu_0}(\nu)d\nu$ ou $d\delta_{\nu_0}(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)d\nu$.

Mesure spectrale continue

- La **densité spectrale de puissance** correspond au cas particulier où la mesure spectrale μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $d\nu$, i.e.

$$d\mu(\nu) = S_{XX}(\nu)d\nu.$$

- On pourra alors utiliser la DSP pour quantifier la puissance (en moyenne statistique) du signal dans une bande de fréquence :

$$\mu([\nu_1, \nu_2]) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\mu(\nu) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} S_{XX}(\nu)d\nu.$$

- En résumé : Le théorème d'Herglotz garantit que toute fonction d'autocovariance semi-définie positive admet une représentation spectrale sous forme de mesure, même si elle n'est pas absolument sommable. Quand elle est sommable, la DSP existe et on aboutit alors au théorème de Wiener-Khinchin.

Exemple du bruit blanc

- Soit $\{X(t)\}_t \sim BB(0, \sigma^2)$.
- On peut montrer que (voir exercice TD) :

$$R_{XX}(k) = \mathbb{E}[X(t)X(t+k)] = \sigma^2 \delta(k),$$

où $\delta(k)$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $k = 0$, 0 sinon.

- Le processus est donc SSL, et comme sa fonction d'autocovariance est absolument sommable le théorème de Wiener-Khinchin s'applique.
- On peut montrer que (voir exercice TD) :

$$S_{XX}(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_{XX}(k) e^{-i2\pi \nu k} = \sigma^2$$

- Vous comprenez désormais pourquoi un bruit blanc s'appelle ainsi, n'est-ce pas ?

Résumé

Type de signal	Mesure spectrale	Exemple	Représentation fréquentielle
Périodique ou constant	Discrète (masses de Dirac)	Cosinus avec phase aléatoire	Raies spectrales (pics isolés)
Aléatoire non périodique	Continue (densité spectrale)	Bruit blanc	Spectre lisse (continu)

La mesure spectrale peut combiner une partie discrète (raies) et une partie continue. (voir exercice TD)

Comprendre intuitivement la notion de DSP

- Essayons de comprendre la DSP d'une autre façon, complémentaire à la précédente.
- Puisque la TFTD d'un processus SSL $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ n'est pas définie, on va tronquer la somme à un intervalle de temps $[-T, T]$, $T \geq 1$, et on fera tendre T vers l'infini.
- On définit donc $\hat{S}_T(\nu)$ comme **le spectre de puissance du processus** observé sur l'intervalle de temps $[-T, T]$, et normalisé par $2T + 1$:

$$\hat{S}_T(\nu) = \frac{1}{2T + 1} \left| \sum_{t=-T}^T X(t) e^{-i2\pi\nu t} \right|^2 \geq 0.$$

- On moyenne statistiquement cette quantité, en prenant son espérance (voir exercice TD) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{S}_T(\nu)] &= \frac{1}{2T+1} \sum_{t=-T}^T \sum_{k=-T}^T R_{XX}(t-k) e^{-i2\pi\nu(t-k)} \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} R_{XX}(p) e^{-i2\pi\nu p} \left(1 - \frac{|p|}{2T+1}\right) \mathbb{1}\{|p| \leq 2T\},\end{aligned}$$

avec $\mathbb{1}\{\cdot\}$ la fonction indicatrice.

- On obtient finalement grâce au théorème de convergence dominée :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\hat{S}_T(\nu)] = S_{XX}(\nu).$$

- Et on en déduit que la DSP est toujours positive.

On peut donc comprendre la DSP comme la moyenne statistique du spectre de puissance (normalisé) d'un processus SSL observé sur un intervalle de temps $[-T, T]$ avec T qui tend vers l'infini.

Densité inter-spectrale de puissance

Pour deux processus SSL $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ et $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possédant une DSP, on définit la densité inter-spectrale de puissance par :

$$S_{XY}(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_{XY}(k) e^{-i2\pi\nu k},$$

où $R_{XY}(k) = \mathbb{E}[X(t+k)Y^*(t)]$ est la fonction d'intercovariance.

Contrairement à la DSP (toujours réelle et positive), la densité inter-spectrale peut avoir une partie imaginaire non nulle.

Stationnarité et décorrélation des coefficients de la TFTD

Une conséquence fondamentale de la stationnarité (au sens large) est que les coefficients de TFTD du signal tronqué sont asymptotiquement décorrélés pour des fréquences distinctes.

Montrons ce résultat :

- Soit $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus SSL supposé centré.
- On définit les coefficients de la TFTD du signal tronqué sur $[-T, T]$:

$$\hat{X}_T(\nu) = \sum_{t=-T}^T X(t) e^{-i2\pi\nu t}.$$

Corrélation des coefficients de le TFTD

On s'intéresse à la covariance entre deux coefficients à des fréquences ν_1 et ν_2 :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{X}_T(\nu_1)\hat{X}_T^*(\nu_2)] &= \sum_{t=-T}^T \sum_{s=-T}^T \mathbb{E}[X(t)X(s)^*] e^{-i2\pi\nu_1 t} e^{i2\pi\nu_2 s} \\ &= \sum_{t=-T}^T \sum_{k=-2T}^{2T} R_{XX}(k) e^{-i2\pi\nu_1 t} e^{i2\pi\nu_2 (t-k)} \quad (k = t - s \in [-2T, 2T]) \\ &= D_T(\Delta\nu) \sum_{k=-2T}^{2T} R_{XX}(k) e^{-i2\pi\nu_2 k}\end{aligned}$$

où

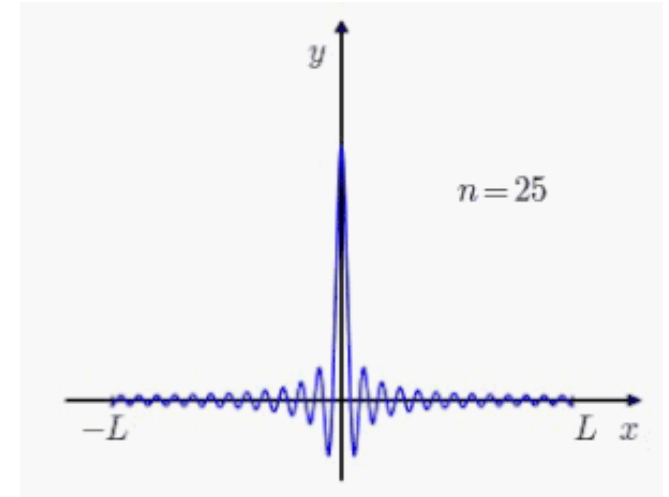
- $R_{XX}(k) = \mathbb{E}[X(t)X(t-k)^*]$;
- $D_T(\Delta\nu) = \sum_{t=-T}^T e^{-i2\pi\Delta\nu t}$ est le **noyau de Dirichlet**, avec $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2$.

Noyau de Dirichlet

Le noyau de Dirichlet, aussi appelé fonction sinus cardinal périodique, peut se développer de la façon suivante :

$$D_T(\Delta\nu) = \sum_{t=-T}^T e^{-i2\pi\Delta\nu t} = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(2T+1)\Delta\nu)}{\sin(\pi\Delta\nu)} & \text{si } \Delta\nu \notin \mathbb{Z} \\ 2T+1 & \text{si } \Delta\nu \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- C'est une fonction 1-périodique, on peut donc restreindre son intervalle d'étude à $\Delta\nu \in [-0.5, 0.5[$.
- Il atteint son maximum égal à $2T+1$ pour $\Delta\nu \in \mathbb{Z}$ (donc en particulier $\Delta\nu = 0$).
- Il s'annule en $\Delta\nu = k \times \frac{2}{2T+1}$ pour $k \in \mathbb{Z}^*$.



Source: [Wikipedia](#). $L = 0.5$ et $n = T$.

Interprétation asymptotique

Etudions finalement la limite quand $T \rightarrow +\infty$ de

$$\mathbb{E}[\hat{X}_T(\nu_1)\hat{X}_T^*(\nu_2)] = D_T(\Delta\nu) \sum_{k=-2T}^{2T} R_{XX}(k)e^{-i2\pi\nu_2k}.$$

Lorsque $T \rightarrow \infty$:

- Si $\nu_1 \neq \nu_2$, alors $\Delta\nu \neq 0$ et le noyau de Dirichlet tend vers 0.¹

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\hat{X}_T(\nu_1)\hat{X}_T^*(\nu_2)] = 0.$$

Les coefficients de la TFTD tronquée sont donc asymptotiquement décorrélés pour des fréquences distinctes.

1. Ce n'est pas évident à montrer, mais on l'admet assez bien à partir du slide précédent en observant que le numérateur oscille de plus en plus vite quand T croît, donc le nombre de zéros de la fonction aussi. L'énergie du noyau se concentre en 0.

- Si $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, alors $\Delta\nu = 0$ et $D_T(0) = 2T + 1$:

$$\mathbb{E}[\hat{X}_T(\nu_1)\hat{X}_T^*(\nu_2)] = \mathbb{E}[|\hat{X}_T(\nu)|^2] = (2T + 1) \sum_{k=-2T}^{2T} R_{XX}(k)e^{-j2\pi\nu k}$$

En divisant par $2T + 1$ et en passant à la limite on obtient :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T + 1} \mathbb{E}[|\hat{X}_T(\nu)|^2] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_{XX}(k)e^{-j2\pi\nu k} = S_{XX}(\nu).$$

La variance (normalisée) des coefficients de la TFTD tronquée est asymptotiquement égale à la DSP.

En effet, $\hat{X}_T(\nu)$ est une somme de $2T + 1$ variables aléatoires donc sa variance croît linéairement avec T . En divisant par la durée d'observation $2T + 1$, on obtient une densité de puissance, qui tend vers la DSP.

Ce résultat est à la base d'un très grand nombres de modèles et algorithmes en traitement du signal, notamment audio.

Gaussian Processes for Underdetermined Source Separation

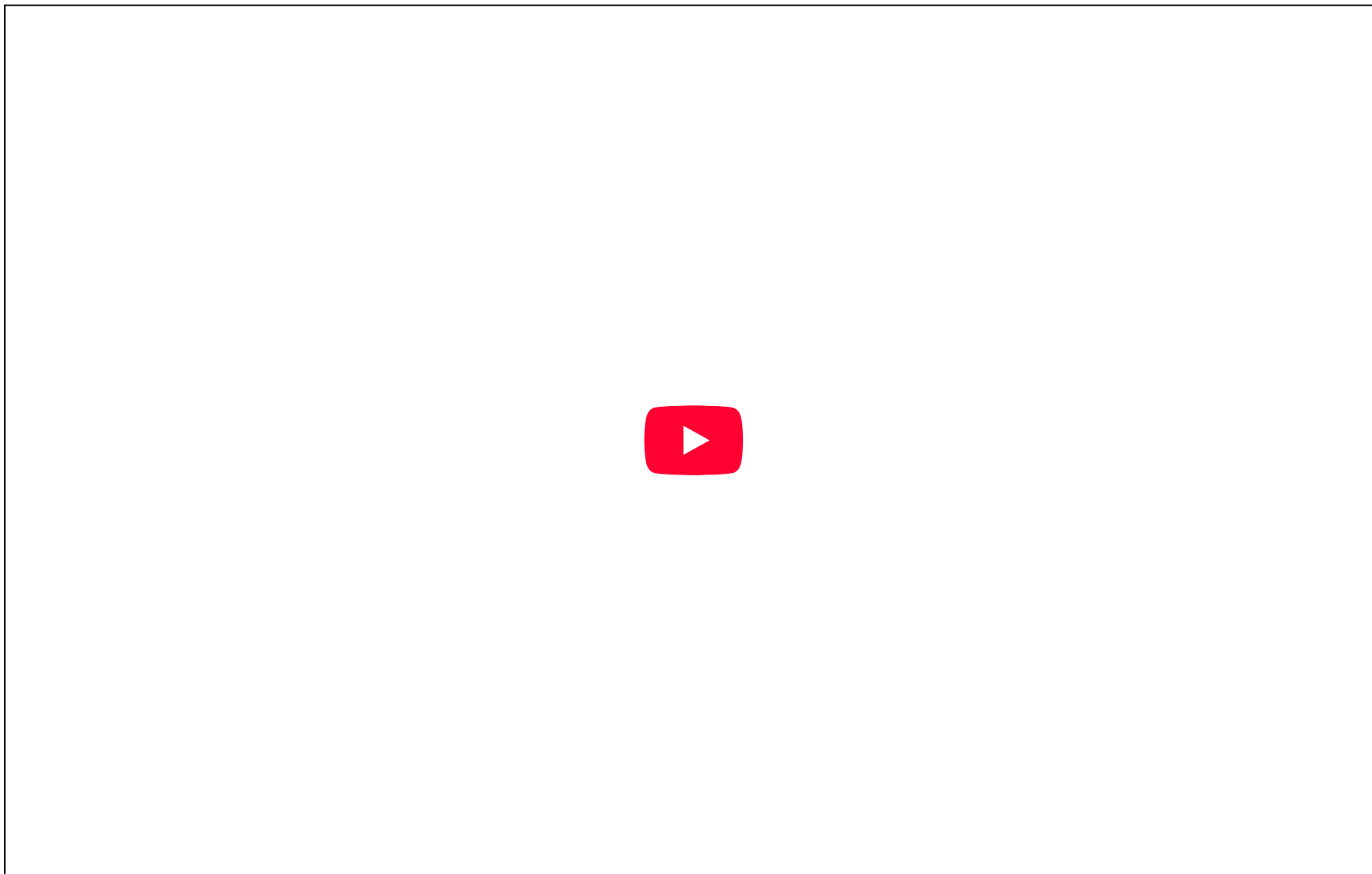
Antoine Liutkus, Roland Badeau, *Senior Member, IEEE*, Gaël Richard, *Senior Member, IEEE*

Abstract—Gaussian process (GP) models are very popular for machine learning and regression and they are widely used to account for spatial or temporal relationships between multi-variate random variables. In this paper, we propose a general formulation of underdetermined source separation as a problem involving GP regression. The advantage of the proposed unified view is firstly to describe the different underdetermined source separation problems as particular cases of a more general framework. Secondly, it provides a flexible means to include a variety of prior information concerning the sources such as smoothness, local stationarity or periodicity through the use of adequate covariance functions. Thirdly, given the model, it provides an optimal solution in the minimum mean squared error (MMSE) sense to the source separation problem. In order to make the GP models tractable for very large signals, we introduce *framing* as a GP approximation and we show that computations for *regularly sampled* and *locally stationary* GPs can be done very efficiently in the frequency domain. These findings establish a deep connection between GP and Nonnegative Tensor Factorizations with the Itakura-Saito distance and lead to effective methods to learn GP hyperparameters for very large and regularly sampled signals.

Index Terms—Gaussian Processes, NMF, NTF, Source Separation, Probability Theory, Regression, Kriging, Cokriging

Source separation is another very intense field of research (see [10] for a review) where the objective is to recover several unknown signals called *sources* that were mixed together in observable *mixtures*. Source separation problems arise in many fields such as sound processing, telecommunications and image processing. They differ mainly in the relative number of mixtures per source signal and in the nature of the mixing process. The latter is generally modeled as *convolutive*, i.e. as a linear filtering of the sources into the mixtures. When the mixing filters reduce to a single amplification gain, the mixing is called *instantaneous*. When there are more mixtures than sources, the problem is called *overdetermined* and algorithms may rely on beamforming techniques to perform source separation. When there are fewer mixtures than sources, the problem is said to be *underdetermined* and is notably known to be very difficult. Indeed, in this case there are less observable signals than necessary to solve the underlying mixing equations. Many models were hence studied to address this problem and they all either restrict the set of possible source signals or assign prior probabilities to them in a Bayesian setting. Among the most popular approaches, we

In audio signal processing ($D=1$), the result (26) is known as adaptive or generalized Wiener filtering and many methods for source separation such as [8], [32] use this technique in a principled way to recover the sources in the frequency domain. Those studies state their probabilistic model in the frequency domain where the time-frequency bins are supposed to be distributed with respect to independent Gaussian distributions. In our approach, the model is expressed directly in the original input space. The two points of view are actually equivalent: a stationary GP has an independently distributed Gaussian representation in the frequency domain. $\underline{\mathbf{S}}_m$ can hence be seen either as the STFT tensor of a covariance function or as a tensor containing the variances of the independent components of $\underline{\mathbf{Y}}$.



Remarque 1/2

Noyau de Dirichlet et mesure de Dirac

- On peut interpréter le noyau de Dirichlet comme une approximation de la mesure de Dirac : il concentre de plus en plus d'énergie autour de 0 quand T augmente, tout en conservant une aire constante égale à 1.
- Pour toute fonction mesurable $\phi : [-0.5, 0.5] \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-0.5}^{0.5} \phi(\nu) D_T(\nu - \nu_0) d\nu = \phi(\nu_0)$$

- Cette convergence est dite faible au sens de la théorie de la mesure.

A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, 1988.

Remarque 2/2

TFTD d'une exponentielle complexe et mesure de Dirac

- La TFTD de l'exponentielle complexe $X(t) = e^{-i2\pi\nu_0 t}$ ne converge pas au sens classique, car $X(t)$ n'est pas sommable.

En revanche, la TFTD de ce signal **définit une mesure spectrale** égale à la mesure de Dirac $\delta_{\nu_0}(\nu)$

- En effet :

$$\text{TFTD}[e^{-i2\pi\nu_0 t}](\nu) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi(\nu - \nu_0)t} = \lim_{T \rightarrow \infty} D_T(\nu - \nu_0) \ll = \gg \delta_{\nu_0}(\nu).$$

- $\ll = \gg$ signifie ici que la convergence se fait au sens des mesures :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-0.5}^{0.5} \phi(\nu) S_T(\nu - \nu_0) d\nu = \int_{-0.5}^{0.5} \phi(\nu) d\delta_{\nu_0}(\nu) = \phi(\nu_0).$$

La somme infinie agit comme une mesure ponctuelle qui sélectionne la valeur de ϕ en ν_0